

FEM-SPH KAPCSOLT SZIMULÁCIÓ TALAJ-SZERSZÁM KAPCSOLAT MODELLEZÉSÉRE

Major Tamás és Csanády Viktória

Nyugat-magyarországi Egyetem, Erdőmérnöki Kar

Kivonat

A korábban készült talajművelő szerszámok gyakorlati tapasztalatok alapján készültek, ezek vizsgálata, elméletének leírása nagyrészt hiányzik. Egy új szerszám megjelenését többéves – szántóföldön és laboratóriumban végrehajtott – kísérletek előzik meg. A szerszám és a talaj kapcsolatának modellezésével lehetővé válik a fejlesztés idejének és költségeinek jelentős csökkentése. A nagyteljesítményű számítógépek gyors fejlődésének és a numerikus eljárásoknak köszönhetően ma már lehetőség van ezen modellezések elvégzésére. FEM-SPH kapcsolt szimuláció segítségével – kétféle haladási sebesség esetén – meghatároztuk a forgó szerszámra ható vízszintes irányú erő nagyságát az idő függvényében. A szimulációs eredményekre illesztett függvény segítségével megállapítottuk a vízszintes irányú erő átlagos és legnagyobb értékét. Meghatározásra került továbbá a normálfeszültség eloszlása a talajban.

Kulcsszavak: gépfejlesztés, talajművelés, forgó szerszám, FEM-SPH kapcsolt szimuláció.

COMBINED FEM-SPH SIMULATION METHOD FOR THE MODELING OF THE INTERACTION OF TILLAGE TOOLS AND THE SOIL

Abstract

Earlier cultivation and tillage tools were designed on the basis of practical experience; testing and records of fundamental theoretical analysis of these tools is largely lacking. Today, the release of new equipment is always preceded by several years of laboratory tests and field experiments. By modelling the interaction between the soil and tillage tools, the time and costs of the development process can be significantly decreased. Thanks to the recent rapid advancement of high performance computers and numerical methods, it is possible to complete these model calculations more effectively now. With the help of a combined FEM/SPH simulation – in this case utilizing two different driving speeds of a tractor – we determined the magnitude of horizontal force acting upon the rotating tool as a function of time. Using the functions fitted to the simulation results, the authors have calculated the average and the maximum values of the horizontal force. Moreover, normal stress distribution in the soil has also been determined.

Keywords: machine improvement, soil cultivation, rotating tool, combined FEM/SPH simulation

BEVEZETÉS

Magyarország adottságai közt eredményes erdőfelújítást végrehajtani a területek többségén csak megfelelő minőségű talajelőkészítést követően lehet. A korábban készült talajművelő szerszámok gyakorlati tapasztalatok alapján készültek, ezek vizsgálata, elméletének leírása nagyjából hiányzik.

A mezőgazdaságban a gépvizsgálat ma már fontos része új mezőgazdasági gépek tervezési és fejlesztési munkálatainak. A vizsgálati eredmények megmutatják a gép használhatóságát, a munka minőségét, az esetleges működési hibákat és szerkesztési hiányosságokat. A kísérleti eredmények támpontul szolgálnak hasonló típusú új gépek szerkesztéséhez, és a meglévők továbbfejlesztéséhez is.

Ezen vizsgálatok ugyanakkor lehetőséget biztosítanak, hogy a gépfejlesztők és üzemeltetők kellő információval rendelkezzenek, lényegesen megkönnyítve, illetve meggyorsítva ezzel a gépek működésével járó kisebb-nagyobb nehézségek megoldását (leküzdését), és alapvetően hozzájárulnak a gépek szakszerű, energiatakarékos, gazdaságos üzemeltetéséhez.

Cél, hogy a gépek a legnagyobb teljesítménnyel, optimális minőségi mutatókkal és ugyanakkor a legkisebb energiafelhasználással legyenek üzemeltethetők.

Az elméleti alapok ismerete lehetővé teszi, hogy a gépek művelő eszközeinek, szerszámainak méreteit, elrendezését, esetleg fordulatszámát, vonó- és hajtóerő-szükségletét, teljesítményigényét és egyéb műszaki jellemzőit úgy határozzuk meg, illetve alakítsuk ki, hogy ezen kívánalmaknak megfeleljenek.

Egy új szerszámnak a megjelenését többéves – szántóföldön és laboratóriumban végrehajtott – kísérletek előzik meg. A szerszám és a talaj kapcsolatának modellezésével lehetővé válik a fejlesztés idejének és költségének jelentős csökkentése. A nagyteljesítményű számítógépek gyors fejlődésének és a numerikus eljárásoknak köszönhetően ma már lehetőség van ezen modellezések elvégzésére.

A numerikus eljárások, köztük a végelem-módszer (angolul: Finite Element Method, FEM) elterjedése megváltoztatta a klasszikus tervezési folyamatot. A numerikus eljárások alkalmazása beépültek a termék előállításának folyamatába.

A gyártási költség, ezen belül a tervezési költség, jelentős részét a kísérleti darabok legyártása és azok próbaüzeme teszi ki. Ezen költségek csak nagy darabszám és/vagy magas termékár esetén térülnek meg. Ezt a költséget jelentős mértékben csökkenti a számítógépes szimuláció (Kovács 2011).

A szükséges prototípusok száma csökkenthető, jól modellezhető problémák esetén akár el is hagyható a prototípus legyártása. Utóbbi esetben már a sorozatgyártásra lehet azonnal berendezkedni, és elegendő a nullszérián próbaüzemet végezni.

A numerikus eljárások számos olyan tényező figyelembevehetőségét teszik lehetővé, amelyeket analitikus módszerekkel egyáltalán nem, vagy csak nagy matematikai nehézségek árán lehetne számításba venni. A számítástechnikában beálló gyors fejlődés, a számítógépek kapacitásának, sebességének nagymértékű növekedése, a fizikai jelenségek

korábbi években még nem látott bonyolultságú modellezésére, gyors számításokra, az eredmények sokoldalú analizálására adnak módot (Páczelt 1999; Klein 1999).

Míg a legfontosabb mezőgazdasági gépek működésének elméleti alapjait már többnyire leírták (Bánházi 1984; Bánházi és mtsai 1978; Rázsó 1958; Sitkei 1986, 1991), az erdőgazdálkodásban használt gépek többségére ilyen összefüggések nem állnak rendelkezésre. Ugyanakkor a mezőgazdaságban használt gépek nem mindig adaptálhatók az erdőgazdálkodás sajátos körülményei miatt.

Nemcsak a korábban, gyakorlati tapasztalatok alapján készült talajművelő szerszámok vizsgálata, elméletének leírása szükséges, hanem a megjelenő új gépek, géptípusok vizsgálata is. Ezek egyre bonyolultabbak, újabb elméleti összefüggések feltárását, azok finomítását követelik.

A VÉGESELEM-MÓDSZER

A mérnöki gyakorlatban előforduló összetett geometriai és terhelési viszonyokat ma már egyre kevésbé lehet visszavezetni a hagyományos, mechanikailag idealizált esetekre. Az analitikus megoldások sok esetben nem alkalmazhatóak, ezért szükségessé vált a különböző numerikus megoldások kidolgozása.

A végeelem-módszer napjainkra a műszaki számítások területén az egyik leggyakrabban alkalmazott numerikus eljárássá vált (Égert és Pere 2011). Ez egy olyan numerikus eljárás, melynek során egy véges tartományon felírt parciális differenciálegyenlet által leírt problémára közelítő becsléssel keressük a megoldást, vagyis a differenciálegyenlet megoldását visszavezetjük egy lineáris egyenletrendszer megoldására (Popper 1985; Páczelt 1993; Günter és Clemens 2002; Meißner és Maurial 2000; Fodor és mtsai 2005). Ez lehetővé teszi bonyolult rendszerek modellezés útján való vizsgálatát. A végeelem-módszer egy összetett mechanikai feladat megoldását – a bonyolult analitikus módszerekkel szemben – igen nagy számú, de egyszerű számítások sorozatával közelíti. A vizsgált tartományt véges számú elemre bontja fel, amelyen belül egyszerű közelítéssel (interpolációval) állítható elő a keresett függvény. Ezen elemek nem fedik át egymást (diszjunktak), viszont közösen a teljes vizsgált tartományt kitöltik. Az elemek határvonalainak összességét hálónak hívják.

A végeelem-analízisnek három fő lépése van. Ezek a preprocessálás, az analízis és a posztprocesszáls. A preprocessálás, vagyis az előfeldolgozás első mozzanata az analizálni kívánt modell CAD alapú szoftver segítségével történő elkészítése. A modell elkészítése után elemezni kell, hogy a modell geometriáján milyen egyszerűsítéseket lehet és célszerű elvégezni a végeelem-analízishez.



Ezt kétféle ellentétes kívánalom befolyásolja:

- a modell minél jobban helyettesítse a valóságot, illetve
- a mechanikai jellemzők jó közelítéssel meghatározhatók legyenek és a feladat bonyolultsága indokolatlanul ne növelje meg a szimuláció idejét (Páczelt és mtsai 2007).

Ezután következik a végeelem háló generálása. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált tartományt véges számú, a modellt egyszeresen lefedő résztartományokra, azaz véges méretű elemekre bontjuk. A végeelem háló mérete és minősége (az elemek szabályos geometriai alaktól való eltérése) nagyban befolyásolja az eredmények pontosságát és a számítási időt, emellett a közelítésre használt függvények fokszáma is hatással van az eredmény pontosságának alakulására. Lehetőség van a rács sűrűségén, a polinom fokszámán, vagy egyszerre mind a kettőn változtatni a jobb megoldás érdekében. (Nagyobb finomságú hálózathoz nagyobb számítási idő tartozik, azonban pontosabb eredményre vezet.) A hálózás során a háló felbontása differenciálható, így a keresett mennyiség szempontjából a kevésbé fontos területeken ritkább, a fontosabb területeken pedig sűrűbb háló használható. Kétdimenziós modellek esetében a rács alakja leggyakrabban háromszög vagy négyszög alakú, három dimenziónál pedig a tetraéder vagy prizma alakú rács alkalmazása terjedt el (Kurutzné és Scharle 1985).

A preprocesszálás során kell megadni az anyagjellemzőket, a kezdeti feltételeket és a kényszereket is.

Az analízis (a lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása) után következik a kiértékelés (posztprocesszálás). Az eredményeket interaktív módon táblázatosan és grafikusan lehet megjeleníteni. A grafikus megjelenítés lehet szintvonalas, színsávós, vektoriális és függvény jellegű. Az eredmények adatain igény szerint matematikai műveleteket lehet végezni. Az eredmények helyes értelmezése megkívánja, hogy értékeljük a feltételezéseinket, az egyszerűsítéseket és a munka során bevitt hibákat: a matematikai modell létrehozásában, a végeelem modell létrehozásában, valamint a végeelem modell megoldásában előforduló hibákat.

Mivel a végeelem-módszer jól alkalmazható anyagi nemlineáris viselkedés esetén is, talajmechanikai feladatok megoldására is gyakran alkalmazzák (Mouazen és Neményi 1999a; Mouazen és Neményi 1999b; Mouazen és mtsai 1999). A talaj és szerszám kapcsolatának végeelem-módszerrel való vizsgálata során pontos képet kaphatunk a talajvágás folyamatáról, a szerszámra ható erőkről és a talajban keletkező deformációkról (Kerényi 1996a; Mouazen és Neményi 1995; Mouazen és Neményi 1996).

A talaj vágását végeelem-módszerrel először Yong és Hanna (1977) vizsgálta. Ők kétdimenziós modellt alkalmaztak, később háromdimenziós modellek is születtek. A FEM fejlődésével a szerszám-talaj kapcsolatának vizsgálatához egyre bonyolultabb modellek készültek. Számos kutató laboratóriumi és szántóföldi mérésekkel összehasonlítva bizonyította, hogy a numerikus megoldások megfelelő eredményeket adnak.

A hazai mezőgépeszeti kutatásokban is születtek már eredmények. Magyarországon Kerényi (1996b) egyszerű szerszám és talaj kapcsolatát modellezte, legfontosabb felada-

tának a fölállított talajmodell igazolását tekintette. A számításokat ő is két dimenzióban végezte (Kerényi 1996a; Kerényi 1996b).

Mouazen (1997) háromdimenziós végeelem analízist használt a talajvágási folyamat modellezéséhez, amely a Drucker-Prager rugalmas tökéletesen alakítható anyagmodellen alapult. Különböző konstrukciójú szerszámok modellezése révén meghatározta az optimális konstrukciójú altalajlazítót, amely minimális vonóerőt igényel, és jó minőségű talajlazítást végez.

Az erdőgazdálkodásban használt gépek közül először homokos-vályogtalajok erdészeti mélylazítókkal történő lazítását vizsgálták végeelem-módszerrel (Mouazen és mtsai 1998).

Ezek zömmel statikus vizsgálatok voltak, mivel az egyszerű végeelemes szimulációk alapvető problémája, hogy csak kis elmozdulások és erőhatások esetén működnek jól.

ANYAG ÉS MÓDSZER

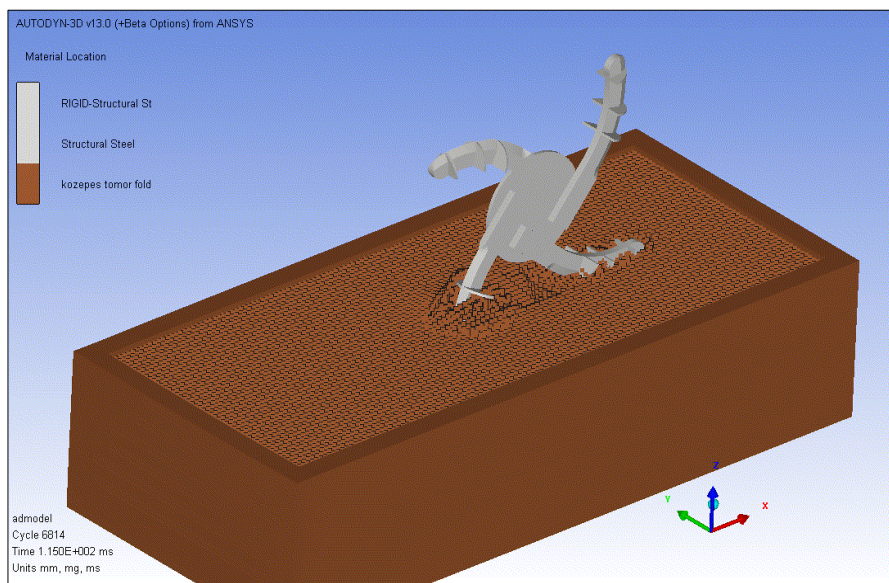
Ezen kutatásban egy speciális forgó késrendszerű pásztázógép (BPG-600) modellezésére vállalkoztunk (1. ábra).



1. ábra: BPG-600 típusú pásztakészítő gép
Figure 1: The BPG-600 type soil tiller machine

A pásztakészítő gép talajművelő szerszáma egy négyágú forgó kapa, amelynek kése ívelt ($R=340$ mm), s erre három pár szárny van felhegesztve, a végek felé keskenyedő szárny szélességgel (55 mm, 45 mm és 35 mm). A szárnyak elhelyezése a kés ívére merőleges, a kések a forgásirányhoz viszonyítva hátrahajlóak. Az ívelt kések és a szárnyak 50° -os szögben vannak élezve a talajba hatolás megkönnyítése céljából. A forgó szerszám geometriai modelljét Solid Edge programmal készítettük el, a numerikus analízis pedig az Ansys 13 végelem programmal történt.

A geometria előkészítésének fázisában először az Ansys program DesignModeler moduljában kialakítottuk a szerszámot körülvevő talaj modelljét. A talaj felszínét a szerszám tengelyétől 200 mm-re definiáltuk, így a kapa geometriai méreteiből adódóan a munkamélység 220 mm. A szerszám köré 1100 mm hosszú, 600 mm széles és 350 mm mély talajvályút készítettünk (2. ábra).



2. ábra: A forgó szerszám és a talajvályú
Figure 2: The rotating tool and soil trough

A modellezés során a szerszám hálózására tetraéder elemeket alkalmaztunk.

A talajjalzítót merev testnek tekintettük, a talaj szilárdságtani tulajdonságainak leírására pedig a Drucker-Prager anyagmodellt alkalmaztuk (Bojtár 1988). A Drucker-Prager anyagmodell a Mohr-Coulomb anyagmodell egy módosítása. A D-P modell alakja a főfeszültségi térben egy kúp, így ennél az alakzatnál numerikus számítási problémák nem lépnek fel a képlékenységi felületen.

Az anyagmodell alapadatait (közepesen tömör talaj) a BME Építőmérnöki Kar Geotechnikai Tanszékének mérési eredményei szolgáltatták (Mouazen és mtsai 1998), mivel erdei talajokra ilyen irányú vizsgálatok nem történtek (1. táblázat).

1. táblázat: A talaj és a talaj - szerszám kapcsolat tulajdonságai
 Table 1: Properties of the soil and the soil-tool interaction

Jellemző	Érték
<i>Talajjellemzők:</i>	
- kohézió [kPa]:	15,5
- belső súrlódási szög [fok]:	31,8
- sűrűség [kg/m ³]:	1731
- Poisson tényező:	0,3596
- Young modulus [kPa]:	8067
<i>Talaj és szerszám kapcsolatának jellemzői:</i>	
- talaj - fém közötti súrlódási szög [fok]:	23
- talaj - fém közötti adhézió [kPa]:	0

A forgó szerszám működése (haladó és forgó mozgás együtt) tranziens jelenség, amely közben nagy erőhatások, illetve elmozdulások léphetnek fel. A végeelem-módszer (FEM) csak kis elmozdulások és erőhatások esetén alkalmazható, ugyanis nagy elmozdulások esetén a végeelem háló folytonossága megszűnik, aminek következtében a szimuláció megakad. Hagyományos FEM módszerrel az anyag szakadásának modellezése gyakorlatilag lehetetlen, ezért FEM-SPH kapcsolt szimulációt alkalmaztunk a talaj-szerszám kapcsolat modellezésére. A szerszámot hagyományos véges elemekből építettük fel, a talajt pedig SPH elemekből. Az SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) – a FEM módszerrel ellentétben – teljes mértékben hálófüggetlen numerikus módszer (Gingold és Monaghan 1977; Monaghan 1988; Monaghan 1992), melyet kezdetben csillagászati számításokra használtak, majd áramlástan modellezéseknél is alkalmazni kezdték. Az utóbbi időben pedig földcsuszamlások modellezésére is sikeresen felhasználták (Bui és mtsai 2008).

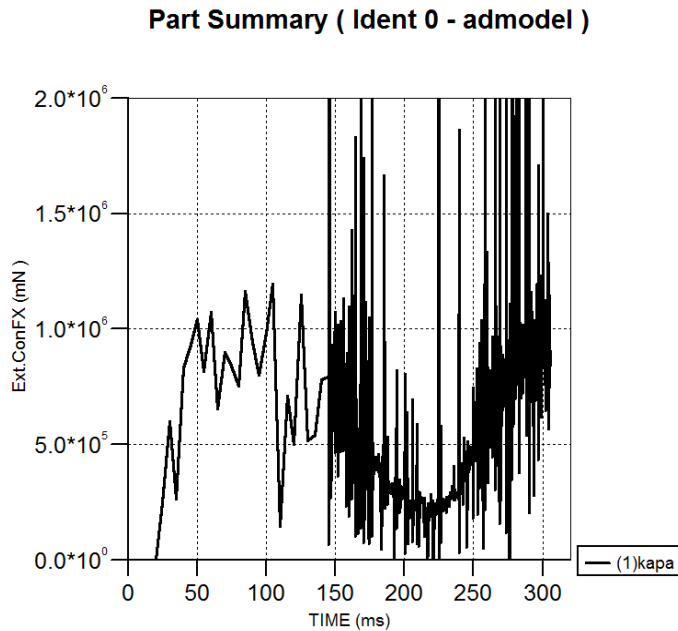
Az SPH elemeket önálló részecskéként képzeljük el, melyek bizonyos tulajdonságokkal rendelkeznek (pl. tömeg, sűrűség stb.), illetve térbeli elhelyezkedésük és sebességük minden időpillanatban ismert. Nem csomópontokhoz vannak kötve, hanem egymáshoz képest bármekkora mértékben elmozdulhatnak. Minden részecskének megadunk egy sugarat, aminek kétszeresén belül lévő további részecskéket szomszédokként fogja érzékelni az algoritmus. Egy részecske fizikai tulajdonságai a szomszédok tulajdonságaiból kerülnek kiszámításra egy speciális, általunk választott súlyfüggvény alapján. Az SPH szimulációk nagy előnye, hogy a testek jelentős deformációkon eshetnek át, széttöredezhetnek, egymással elkeveredhetnek, anélkül, hogy ez a futást érdemben veszélyeztetné.

Az SPH elemek méretét 14 mm-nek választottuk. A számítások során az SPH elemek száma 147.885, a végeelem háló elemszáma 34.446-ra adódott.

A szerszám süllyedésének és elfordulásának megakadályozására kényszereket alkalmaztunk.

EREDMÉNYEK ÉS MEGVITATÁSUK

A szimulációt 1 km/h és 1,5 km/h haladási sebesség, illetve 58 1/min fordulatszám mellett futtatva a szerszámra ható vízszintes irányú reakcióerőre a 3. ábra szerinti eredményeket kaptuk. A zaj ellenére is megfigyelhető egy sinusos görbe. Ennek oka az, hogy folyamatosan változik a szerszám talajban lévő része.



3. ábra: Vonóerő alakulása az idő függvényében 1 km/h haladási sebesség esetén
Figure 3: Traction force as a function of time, at 1 km/h forward speed

A vonóerő átlagos, illetve legnagyobb értékének meghatározására a ponthalmazra a STATISTICA programmal sinus függvényt illesztettünk és korrelációanalízist végeztünk.

$$var2 = b_3 \cdot \sin(b_2 \cdot (var1 - b_1)) + b_0 \quad (1)$$

ahol: $var2$: a vízszintes irányú reakcióerő [mN],
 $var1$: az idő [ms].

A b_0 , b_1 , b_2 , b_3 a függvény együtthatói, melynek értékeit a 2. táblázat tartalmazza.

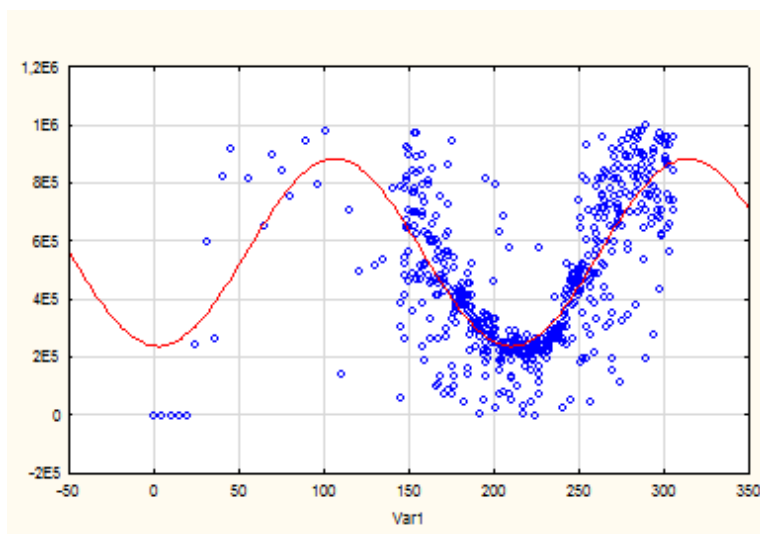
2. táblázat: A függvény együtthatói és korrelációs együtthatója
 Table 2: Coefficients of the function and its correlation coefficient

Haladási sebesség [km/h]	b_0	b_1	b_2	b_3	R
1	322478	0,030228	366,4032	559621,3	0,76605
1,5	355581	0,033438	237,8738	635920,9	0,67366

Az adatok centrozásával (finomításával) javítható a korrelációs együttható értéke ($R=0,89344$ -re), de lényegi eltérés nem tapasztalható a függvény futásában.

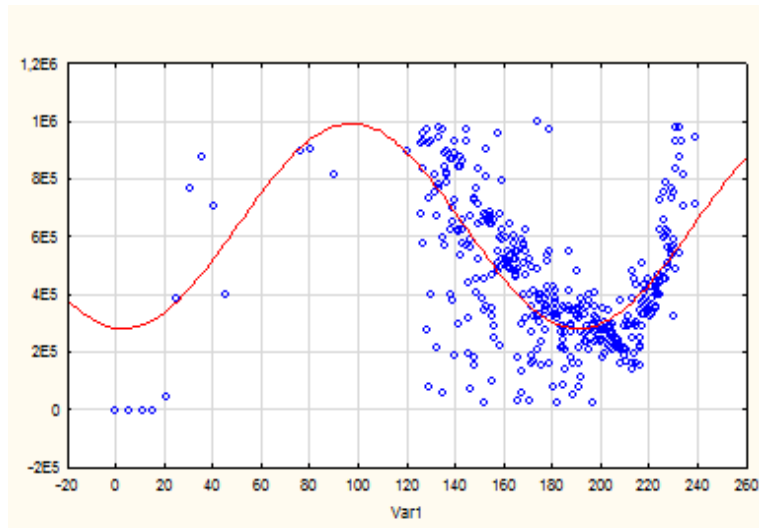
A függvény együtthatóiból adódóan 1 km/h haladási sebességnél a vonóerő átlagos értéke 560 N, legnagyobb értéke 882 N; 1,5 km/h haladási sebességnél pedig 636 N, illetve 992 N.

Az illesztett függvények a ponthalmazokkal a 4. és 5. ábrán láthatók.



4. ábra: Az illesztett függvény 1 km/h haladási sebesség esetén
 Figure 4: Fitted function at 1 km/h tractor speed

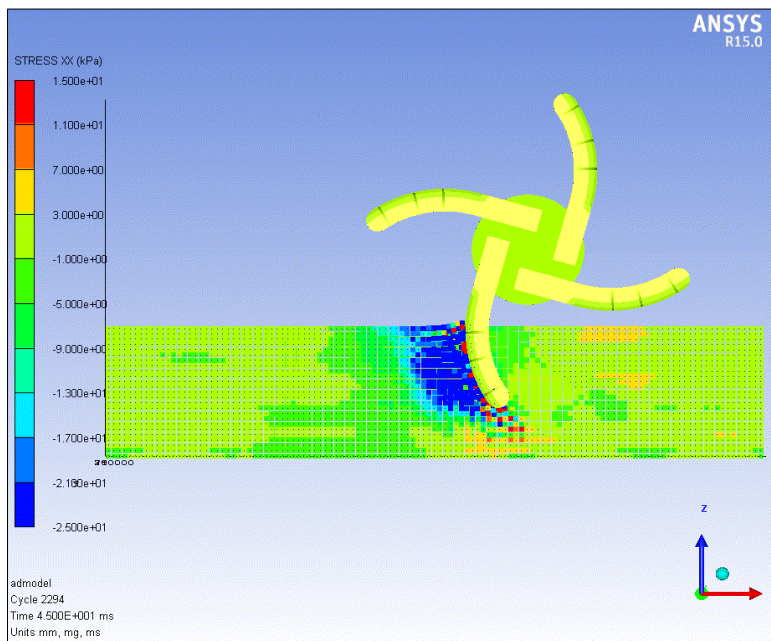
A normálfeszültség eloszlását a szimuláció során kiszámolt eredmények alapján ábrázolhatjuk (6. ábra). A deformációs zónán belül a feszültség közel állandó. A deformációs zóna a szerszám előtt 14 cm távolságig terjed, oldalirányban a szárnyak végétől 11 cm-re.



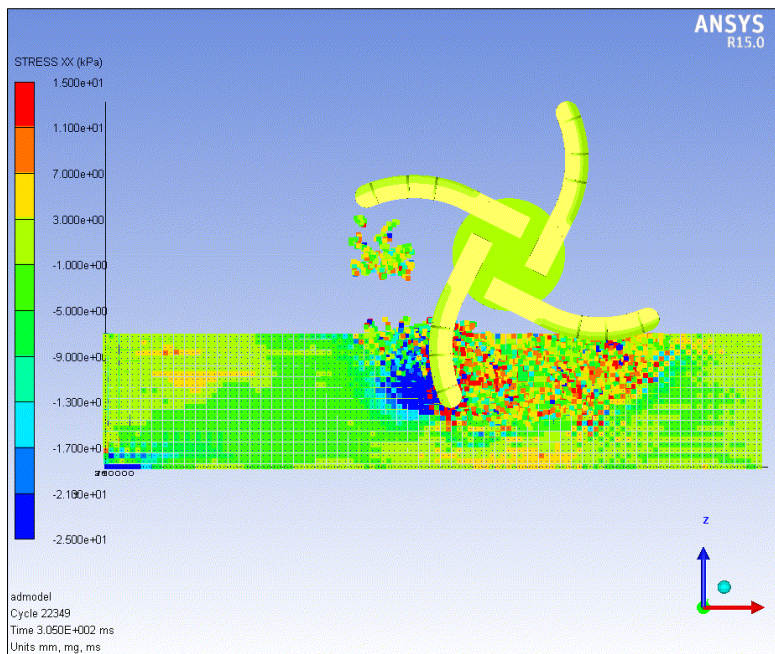
5. ábra: Az illesztett függvény 1,5 km/h haladási sebesség esetén
 Figure 5: Fitted function at 1.5 km/h tractor speed

A modell lehetőséget biztosít az energetikai viszonyok kvalitatív elemzésére. A modell elemzése alapján megállapítottuk, hogy a szerszám előtt a nyomófeszültség maximális értéke -25 kPa, a szerszám mögött pedig 15 kPa húzófeszültség ébred (7. ábra).

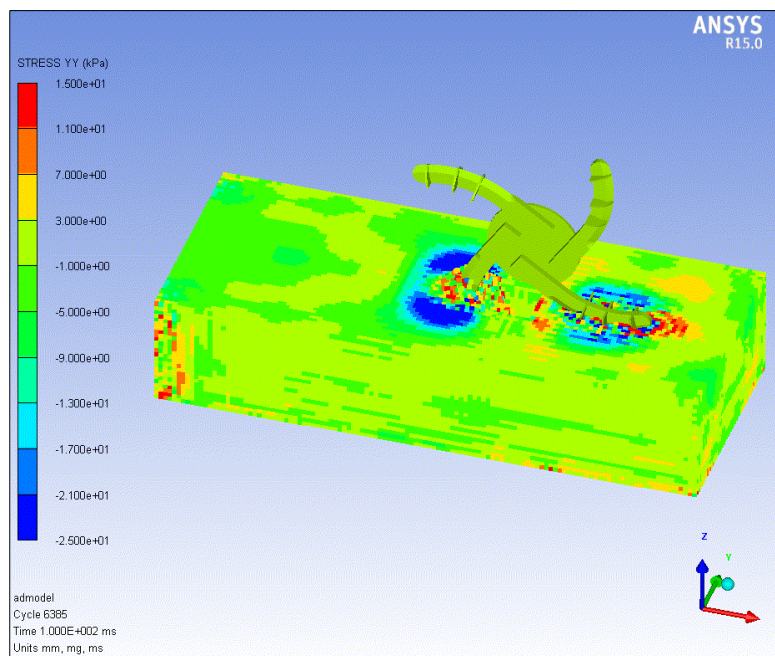
A feszültségeloszlás a szerszám geometriájából adódóan szimmetrikus (8. ábra).



6. ábra: Az x irányú normálfeszültség eloszlása a szimuláció indításakor
 Figure 6: Distribution of the normal stress in the X direction at the start of the simulation



7. ábra: Az x irányú normálfeszültség eloszlása a második kapa munkája közben
 Figure 7: Distribution of the normal stress in the X direction during the operation of knife 2



8. ábra: Az y irányú normálfeszültség eloszlása a második kapa munkájának kezdetén
 Figure 8: Distribution of the normal stress in the Y direction at the start of the operation of knife 2

ÖSSZEFOGLALÁS

Az erdőgazdálkodás során alkalmazott talajművelő szerszámok gyakorlati tapasztalatok alapján készültek, elméletük leírása hiányzik. A mezőgazdaságban a gépvizsgálat ma már fontos része új mezőgazdasági gépek tervezési és fejlesztési munkálatainak.

FEM-SPH kapcsolt szimuláció segítségével – kétféle haladási sebesség esetén – meghatároztuk a forgó szerszámra ható vízszintes irányú erő nagyságát az idő függvényében. A szimulációs eredményekre illesztett függvény segítségével megállapítottuk a vízszintes irányú erő átlagos és legnagyobb értékét. Meghatározásra került továbbá a normálfeszültség eloszlása a talajban.

A kidolgozott szimulációs módszer, mely a statikus szerszámok mellett forgó szerszámok modellezésére is alkalmas, kellő alapot jelent további szerszám konstrukciók numerikus analízissel történő vizsgálatához. A különböző szerszám konstrukciók (különböző íveltségű szerszám, különböző élezési szög, más lazítószárny kialakítás) összehasonlíthatósával lehetőséget nyújt egy olyan optimális geometriájú szerszám kifejlesztésére, mely minimális vonóerőt igényel, ugyanakkor jó minőségű talajlazítást végez. Meghatározható az optimális haladási sebesség és fordulatszám, két vagy több párhuzamosan működő szerszám vizsgálatával a szerszámok közti optimális távolság.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- Bánházi J. (szerk.) 1984: A szántóföldi munkagépek működésének elméleti alapjai. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest.
- Bánházi J.; Koltay J.; Szendrő P. és Véner I. 1978: Szántóföldi munkagépek. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest.
- Bojtár I. 1988: Mechanikai anyagmodellek. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Bui, H. H.; Fukagawa, R.; Sako, K. and Wells, J. C. 2008: SPH-Based Numerical Simulations for Large Deformation of Geomaterial Considering Soil-Structure Interaction. The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG), 1: 570-578.
- Égert J. és Pere B. 2011: Végeelem analízis. MSC jegyzet és példatár. UNIVERSITAS-GYŐR Nonprofit Kft, Győr.
- Fodor T.; Orbán F. és Sajtos I. 2005: Mechanika. Végeelem-módszer. Elmélet és alkalmazás. Szaktudás Kiadó Ház, Budapest.
- Gingold, R. A. and Monaghan, J. J. 1977: Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. astr. Soc.* 181: 375-389. doi: 10.1093/mnras/181.3.375
- Günter, M. und Clemens, G. 2002: FEM für Praktiker. Band 1: Grundlagen. Expert Verlag, Renningen.
- Kerényi Gy. 1996a: A talaj vágásának modellezése végeelem módszerrel. Doktori értekezés, Budapest.
- Kerényi Gy. 1996b: A talaj és egyszerű szerszám kapcsolatnak modellezése végeelem módszerrel. *Járművek, Építőipari és Mezőgazdasági Gépek*, 12: 431-435.
- Klein, B. 1999: FEM Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau. Vieweg, 3., überarbeitete Auflage. Braunschweig/Wiesbaden.

- Kovács Á. (szerk.) 2011: Végeselem módszer. Egyetemi tananyag. Typotex Kiadó, Budapest.
- Kurutzné Kovács M. és Scharle P. 1985: A végeselem-módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Meißner, U. F. und Maurial, A. 2000: Die Methode der finiten Elemente. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- Monaghan, J. J. 1988: An introduction to SPH. Computer Physics Communications. 48: 89-96. doi: 10.1016/0010-4655(88)90026-4
- Monaghan, J. J. 1992: Smoothed Particle Hydrodynamics. Annu. Rev. Astron. Astrophys. 30: 543-574. doi: 10.1146/annurev.aa.30.090192.002551
- Mouazen, A. M. 1997: Modelling the interaction between the soil and tillage tools. Candidate of Science (Doctor of Philosophy, Ph.D.) Mosonmagyaróvár.
- Mouazen, A. M. and Neményi, M. 1995: Modeling the interaction between the soil and simple tillage tool. Hungarian Agricultural Engineering 8: 67-70.
- Mouazen, A. M. and Neményi, M. 1996: Two-Dimensional Finite Element Analysis of Soil Cutting by Medium Subsoiler. Hungarian Agricultural Engineering 9: 32-36.
- Mouazen, A. M. and Neményi, M. 1999a: Finite element analysis of subsoiler cutting in non-homogeneous sandy loam soil. Soil & Tillage Research, 51: 1-15. doi:10.1016/S0167-1987(99)00015-X
- Mouazen, A. M. and Neményi, M. 1999b: Tillage tool design by the finite element method: Part 1. Finite element modelling of soil plastic behaviour. Journal of Agricultural Engineering Research, 72: 37-51. doi:10.1006/jaer.1998.0343
- Mouazen, A. M.; Neményi, M.; Schwanghart, H. and Rempfert, M. 1999: Tillage tool design by the finite element method: Part 2. Experimental validation of the finite element results with soil bin test. Journal of Agricultural Engineering Research. 72: 53-58. doi:10.1006/jaer.1998.0344
- Mouazen, A. M.; Neményi, M. and Horváth, B. 1998: Investigation of Forestry deep subsoiling by the finite element method. Hungarian Agricultural Engineering. 11: 47-49.
- Páczelt I. 1993: A végeselem-módszer alapjai. Miskolci Egyetemi Könyvkiadó, Miskolc.
- Páczelt I. 1999: Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban, I. kötet, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc.
- Páczelt I.; Szabó T. és Baksa A. 2007: A végeselem-módszer alapjai. Egyetemi jegyzet, Miskolc.
- Popper Gy. 1985: A végeselem-módszer matematikai alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Rázsó I. (szerk.) 1958: Mezőgazdasági gépek elmélete. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Sitkei Gy. 1986: Mezőgazdasági és erdészeti járművek modellezése. Akadémiai Kiadó. Budapest.
- Sitkei Gy. 1991: Compaction of agricultural soils with viscoelastic behavior under confined and conditions. Proc. of 5th European Conf. of the ISTV, Budapest. 257-264.
- Yong, R. N. and Hanna, A. W. 1977: Finite element analysis of plane soil cutting. Journal of Terramechanics, 14(3): 103-125. doi:10.1016/0022-4898(77)90010-6

Érkezett: 2015. március 23.

Közlésre elfogadva: 2015. október 10.